**Zdzisław A. Golda, Andrzej Woszczyna***

# Akustyka wczesnego wszechświata — zwięzły przewodnik matematyczny

## 1. Wprowadzenie

Odkrywanie falowej natury skalarnych perturbacji wczesnego wszechświata ma swoją historię. Uważny Czytelnik znajdzie równanie falowe w rozdziale 5.5 klasycznej dziś pracy Harrisona [1]. Postać trygonometryczna rozwiązań (lub w formie funkcji Bessela) zależnych od $\omega\eta$ pojawia się w pionierskich pracach [2] i [3], a później w gauge-inwariantnej teorii Bardeena [4]. Dla płaskiego modelu wszechświata wypełnionego promieniowaniem Sachs i Wolfe podali jawną postać równania zaburzeń w postaci równania d'Alemberta (w pracy [5] twierdzenie na ss. 76–77). Ogólny, fononowy opis perturbacji wraz z próbą ich skwantowania w płaskim radiacyjnym modelu sformułował Lukash [6], a dalsze badania ze szczególnym uwzględniem aspektu kwantowego perturbacji zostały rozwinięte przez Chibisova i Mukhanova [7]. Falowy charakter zaburzeń wczesnego wszechświata został potwierdzony w klasycznym podejściu Lifszyca i Chałatnikowa [8] w pracy [9]. Przejawy falowości zaburzeń w materii barionowo-elektronowej zostały zauważone przez Yamamoto, Sugiyamę i Sato [10]. Analogię pomiędzy falowym charakterem zaburzeń skalarnych a kosmologicznymi falami grawitacyjnymi można znaleźć w pracach Grishchuka [11] i White'a [12].

Wydaje się, że falowa natura zaburzeń gęstości w rozszerzającym się ośrodku z ciśnieniem jest dziś całkowicie zrozumiała w ramach ogólnej teorii względności. Kontrowersje pojawiają się jednak, gdy wyniki te stosowane są do kosmologii. Oto najważniejsze z nich:

---

*Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Orla 171, 30–244 Kraków.

**(i)** Rozwiązania falowe w ekspandującym wszechświecie mają tę własność, że w otoczeniu osobliwości początkowej (w granicy $\eta \to 0^+$) można je przedstawić jako sumę dwu fal stojących o odpowiednio rosnącej i malejącej amplitudzie. Podobny podział na mody rosnący i malejący można uzyskać dla pewnej klasy nieunormowanych rozwiązań w reżimie długich fal ($\omega \to 0$). Własność ta jest artefaktem zaniedbanej normalizacji, jednak dość powszechnie wyciągany jest stąd wniosek o fizycznie odmiennym, niefalowym charakterze propagacji zaburzeń przekraczających horyzont dźwięku. Chociaż pogląd ten łatwo jest obalić, opierając się na ścisłych rozwiązaniach [3]–[6], [9] wciąż stanowi on podstawę interpretacji kształtu widma fluktuacji mikrofalowego promieniowania tła, a w szczególności wyznaczania parametru deceleracji.

**(ii)** Równania propagacji zaburzeń wyrażone w różnych układach odniesienia (z różnym cechowaniem) nie są tożsame. Sprowadzenie rozwiązań różnych formalizmów gauge-inwariantnych do wspólnej postaci jest konieczne dla ostatecznego ustalenia fizycznych własności zaburzeń gęstości.

**(iii)** Na trudności napotyka analiza pola akustycznego w przestrzeni o ujemnej krzywiźnie.

Przyczyną większości tych nieporozumień jest brak spójnego, matematycznego opisu zjawisk akustycznych w kosmologii, jak również brak pełnej świadomości stopnia złożoności tych zjawisk. Przedstawiony poniżej „przewodnik matematyczny” zawiera jedynie skromną część tych zagadnień i oparty jest w dużej mierze na pracach [9], [13], [14]. Dla autorów niniejszego opracowania silne inspiracje stanowiły wykłady z geometrii akustycznej wygłoszone przez M. Vissera na konferencji ERE-2001 (Universidad Complutense, Madrid 2001) i przez W. Unruha w trakcie COSLAB School (Jagellonian University, Kraków 2002).

## 2. Perturbacje w synchronicznym układzie odniesienia

Dla adiabatycznych perturbacji gęstości można skonstruować zmienne perturbacyjne (pole $\psi$ w synchronicznym układzie odniesienia oraz jego analogony w gauge-inwariantnych podejściach), które propagują się identycznie jak bezmasowe pole skalarne w pewnej czasoprzestrzeni Robertsona-Walkera. Konstrukcja tych pól i geometrii tła jest jednoznaczna i sprowadza równania propagacyjne zaburzeń do równania d'Alemberta w zakrzywionej czasoprzestrzeni [15]. Tym samym teoria pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni stanowi naturalny język opisu zaburzeń kosmologicznych i właściwe narzędzie dla badania ich wpływu na mikrofalowe promieniowanie tła.

Rozważmy modele wszechświata Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera z metryką postaci

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\ \mathrm{diag}\left[-1,\ 1,\ \frac{\sin^2(\sqrt{K}\chi)}{K},\ \frac{\sin^2(\sqrt{K}\chi)}{K}\sin^2\vartheta\right] \tag{1}$$

i tensorem energii-pędu cieczy idealnej

$$T^{\mu\nu} = [\epsilon(\eta) + p(\epsilon(\eta))]\, u^\mu u^\nu + p(\epsilon(\eta))\, g^{\mu\nu}. \tag{2}$$

Indeks krzywizny $K$ potraktujemy jako parametr ciągły i zachowamy go jawnie zarówno w równaniach, jak i rozwiązaniach tak długo jak będzie to możliwe. Tradycyjne formuły w metryce (1) mogą być wówczas odzyskane przez podstawienie za $K = \pm 1$ lub przez przejście graniczne z $K \to 0$. Zakładamy dalej barotropowe równanie stanu $p = p(\epsilon)$ i ograniczymy się jedynie do badania adiabatycznych perturbacji gęstości (patrz [4] rozdział V.A). W szczególności, wykluczamy wszelkie procesy dyssypacyjne. Wówczas w synchronicznym układzie odniesienia poprawki do metryki określone są przez dwie funkcje skalarne $\lambda(\eta)$ i $\mu(\eta)$. Obie te funkcje są rozwiązaniami liniowego, różniczkowego układu równań drugiego rzędu [8]

$$\lambda''(\eta) + 2\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\lambda'(\eta) - \frac{k^2 - K}{3}\left[\lambda(\eta) + \mu(\eta)\right] = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\mu''(\eta) + \left[2 + 3\frac{p'(\eta)}{\epsilon'(\eta)}\right]\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\mu'(\eta) + \\ &+\frac{k^2 - 4K}{3}\left[1 + 3\frac{p'(\eta)}{\epsilon'(\eta)}\right]\left[\lambda(\eta) + \mu(\eta)\right] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Współczynniki tego układu są zdeterminowane przez dynamikę rozważanego modelu. Natomiast kontrast gęstości $\delta(\eta, \mathbf{x})$ jest określony przez całkę Fouriera

$$\delta(\eta, \mathbf{x}) = \int \delta_k\, Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi)\, \mathrm{d}^3k + c.c. \tag{5}$$

ze współczynnikami postaci [8]

$$\delta_k = \frac{1}{3\epsilon(\eta)a^2(\eta)}\left[(k^2-4K)\,[\lambda(\eta)+\mu(\eta)] + 3\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\mu'(\eta)\right]. \tag{6}$$

Współczynniki Fouriera kontrastu gęstości są zbudowane z wielkości zależnych od dynamiki modelu kosmologicznego oraz z funkcji skalarnych $\lambda(\eta)$ i $\mu(\eta)$. Wielkość $k$ jest liczbą falową $k \equiv |\mathbf{k}|$, zaś $Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi)$ są skalarnymi hiperharmonikami.

Wykorzystując transformację Darboux kontrastu gęstości, wprowadzamy nową zmienną perturbacyjną $\psi(\eta, \mathbf{x})$ określoną następującym wzorem

$$\psi(\eta, \mathbf{x}) = a(\eta)H^2(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\delta(\eta, \mathbf{x})}{H(\eta)\left[1+\frac{p(\eta)}{\epsilon(\eta)}\right]}. \tag{7}$$

Wówczas równanie propagacji dla nowej zmiennej $\psi(\eta, \mathbf{x})$ przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\psi(\eta, \mathbf{x}) + \left(2\frac{\mathsf{a}'(\eta)}{\mathsf{a}(\eta)} - \frac{{c_\mathrm{s}}'(\eta)}{c_\mathrm{s}(\eta)}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi(\eta, \mathbf{x}) +& \\ -{c_\mathrm{s}}^2(\eta)\,\triangle\psi(\eta, \mathbf{x}) = 0&,\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie operator Laplace'a $\triangle$ działa na przestrzeniach stałego czasu a

$${c_\mathrm{s}}^2(\eta) = \frac{p'(\eta)}{\epsilon'(\eta)} \quad \text{i} \quad \mathsf{a}(\eta) = a(\eta)\sqrt{\frac{1}{c_\mathrm{s}(\eta)}\frac{\epsilon(\eta)+p(\eta)}{3H^2(\eta)}}. \tag{9}$$

Wielkość $c_\mathrm{s}(\eta)$ jest nazywana prędkością dźwięku, natomiast $H(\eta) = a'(\eta)/a^2(\eta)$ jest parametrem Hubble'a wyrażonym w czasie konforemnym. Chociaż mody cechowania mogą wnosić swój wkład do kontrastu gęstości $\delta(\eta, \mathbf{x})$, to wprowadzona nowa zmienna $\psi$ jest gauge-inwariantna[1]. Równanie (8) ma taką samą formę jak równanie (1.10) w pracy Lukasha [6] i może być niezależnie wyprowadzone w ramach formalizmu Lagrange'a.

Wprowadzamy również nową zmienną niezależną $\zeta$ jako miarę czasu określoną przez następującą całkę

$$\zeta = \int c_\mathrm{s}(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{10}$$

[1]Konstrukcja gauge-inwariantnych zmiennych za pomocą transformacji Darboux w modelach kosmologicznych zdominowanych przez promieniowanie jest szczegółowo przedyskutowana w pracy [9] i niezależnie stosowana w pracy [16].

Zmiana czasu konforemnego na nowy czas $\zeta$ sprowadza równanie (8) do równania

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\psi(\zeta,\mathbf{x}) + 2\frac{\mathsf{a}'(\zeta)}{\mathsf{a}(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi(\zeta,\mathbf{x}) - \triangle\psi(\zeta,\mathbf{x}) = 0, \tag{11}$$

które jest jawną formą równania d'Alemberta

$$\Box\,\psi(\zeta,\mathbf{x}) \equiv \nabla^\mu\nabla_\mu\psi(\zeta,\mathbf{x}) = 0 \tag{12}$$

dla pola skalarnego $\psi$ propagującego się w czasoprzestrzeni Robertsona-Walkera

$$\mathsf{g}_{\mu\nu} = \mathsf{a}^2(\zeta)\ \mathrm{diag}\left[-1,\ 1,\ \ \frac{\sin^2(\sqrt{K}\chi)}{K},\ \ \frac{\sin^2(\sqrt{K}\chi)}{K}\sin^2\vartheta\right] \tag{13}$$

z nowym czynnikiem skali

$$\mathsf{a}(\zeta) = a(\zeta)\sqrt{\frac{1}{c_{\mathrm{s}}(\zeta)}\frac{\epsilon(\zeta)+p(\zeta)}{3H^2(\zeta)}}. \tag{14}$$

Zauważmy, że równanie (12) z tensorem metrycznym (13) tworzy strukturę zwaną geometrią akustyczną [17]. Adiabatyczne perturbacje w rozszerzającym się wszechświecie propagują się jak bezmasowe pole skalarne. Zmienna $\zeta$ może być określana mianem *akustycznego czasu konforemnego* ze względu na to, że w geometrii akustycznej pełni rolę analogiczną do $\eta$. Sprowadzenie równania zaburzeń w kosmologii z barotropowym równaniem stanu stanowi uogólnienie twierdzenia Sachsa-Wolfe'a ([5], ss. 76–77). Równania (11) i (12) mają identyczną formę co równania opisujące propagację fal grawitacyjnych w bezciśnieniowym ekspandującym środowisku [11].

## 3. Gauge-niezmiennicze podejścia do zaburzeń — podstawowe równania

*Rozdział ten zawiera zestawienie formuł użytecznych dla kosmologów parających się teorią zaburzeń i może być pominięty przez Czytelnika zainteresowanego jedynie ogólnym rozumieniem tych zagadnień.*

Równanie d'Alemberta można otrzymać dla perturbacji gęstości we wszystkich gauge-inwariantnych formalizmach. Poniżej przedstawiono listę odpowiednich transformacji. Tam, gdzie to było możliwe, zachowana została oryginalna notacja autorów. Wprowadzono jedynie jednolite oznaczenia dla czynnika skali $a(t)$, gęstości energii $\epsilon$, prędkości dźwięku $c_\mathrm{s}$ i skalara ekspansji $\theta = 3H$. Duża litera $K$ zawsze oznacza indeks krzywizny przestrzennej modelu, a mała litera $k$ — liczbę falową. Trzeba zauważyć, że chociaż wielkości $\widehat{\Delta\epsilon}$, $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Phi_\mathrm{H}}$, $\widehat{\epsilon_\mathrm{m}}$, $\widehat{\delta\epsilon}$, $\widehat{\phi}$ spełniają to samo równanie propagacji, nie są one identyczne. Ich geometryczny sens wynika z definicji oryginalnych wielkości $\Delta\epsilon$, $\Delta$, $\Phi_\mathrm{H}$, $\epsilon_\mathrm{m}$, $\delta\epsilon$, $\phi$.

*Autor*: Olson [18]
*Równania propagacji*[2] (praca [19] układ (21a–21b)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x}) &= \\ &= a(\eta)\left[-\frac{5}{3}\theta(\eta)\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x}) - [\epsilon(\eta)+p(\eta)]\,\Delta\theta(\eta,\mathbf{x})\right],\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta\theta(\eta,\mathbf{x}) = a(\eta)\Bigg[&-\frac{{c_\mathrm{s}}^2(\eta)}{a^2(\eta)\,[\epsilon(\eta)+p(\eta)]}\,[\triangle + 3K]\,\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x}) + \\ &-\frac{1}{2}\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x}) - \frac{4}{3}\theta(\eta)\Delta\theta(\eta,\mathbf{x})\Bigg].\end{aligned} \tag{16}$$

*Zmienne*:
$\Delta\epsilon$ — laplasjan gęstości,
$\Delta\theta$ — laplasjan ekspansji.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\Delta\epsilon}(\eta,\mathbf{x}) = 0$ jest spełnione przez zmienną:

$$\widehat{\Delta\epsilon}(\eta,\mathbf{x}) = \frac{H^2(\eta)}{a^2(\eta)\,[\epsilon(\eta)+p(\eta)]}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{a^5(\eta)}{H(\eta)}\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x})\right]. \tag{17}$$

*Autorzy*: Bruni, Dunsby and Ellis ([20] i podana w tej pracy bibliografia)
*Równanie propagacji* (równanie (73) w pracy [20]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta(t,\mathbf{x}) + (2 + 3{c_\mathrm{s}}^2 - 6w)H\frac{\partial}{\partial t}\Delta(t,\mathbf{x}) + \\ -\left[\left(\frac{1}{2} + 4w - \frac{3}{2}w^2 - 3{c_\mathrm{s}}^2\right)\kappa\,\epsilon + 12({c_\mathrm{s}}^2 - w)\frac{K}{a^2}\right]\Delta(t,\mathbf{x}) + \\ -{c_\mathrm{s}}^2\triangle(\Delta(t,\mathbf{x})) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

---

[2]Przedstawiamy uogólnienie formalizmu Olsona dla modeli o dowolnej krzywiźnie $K$ wg [19].

*Zmienne*:
$w = p/\epsilon$ — stosunek ciśnienia do energii,
zmienna perturbacyjna: $\Delta(\eta, \mathbf{x}) = a^2(\eta)\frac{\Delta\epsilon(\eta,\mathbf{x})}{\epsilon(\eta)}$.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\Delta}(\eta, \mathbf{x}) = 0$ spełnione jest przez zmienną:

$$\widehat{\Delta}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{H^2(\eta)}{a^2(\eta)\left[\epsilon(\eta) + p(\eta)\right]} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{a^3(\eta)\epsilon(\eta)}{H(\eta)}\Delta(\eta, \mathbf{x})\right]. \tag{19}$$

*Autor*: Bardeen [4]
*Równanie propagacji* (nie jest zapisane w sposób jawny w cytowanej pracy, daje się jednakże wyprowadzić z innych przedstawionych tam równań):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\Phi_{\mathrm{H}}(\eta, \mathbf{x}) + \left[1 + c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\right] a(\eta)\theta(\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\Phi_{\mathrm{H}}(\eta, \mathbf{x}) + \\ - \Bigg[2K\left[1 + 3c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\right] + a^2(\eta)\epsilon(\eta)\left(\frac{p(\eta)}{\epsilon(\eta)} - c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\right) + \\ + c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\triangle\Bigg]\Phi_{\mathrm{H}}(\eta, \mathbf{x}) = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

*Zmienne*:
$\Phi_{\mathrm{H}}$ — gauge-inwariantny potencjał.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\Phi_{\mathrm{H}}}(\eta, \mathbf{x}) = 0$ spełnione jest przez:

$$\widehat{\Phi_{\mathrm{H}}}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{H^2(\eta)}{a^2(\eta)\left[\epsilon(\eta) + p(\eta)\right]} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{a(\eta)}{H(\eta)}\Phi_{\mathrm{H}}(\eta, \mathbf{x})\right]. \tag{21}$$

*Autor*: Bardeen [4]
*Równanie propagacji* (równanie (4.9) w pracy [4])

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left[\epsilon(\eta)a^3(\eta)\epsilon_{\mathrm{m}}(\eta, \mathbf{x})\right] + \\ + \left[1 + 3c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\right]\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\epsilon(\eta)a^3(\eta)\epsilon_{\mathrm{m}}(\eta, \mathbf{x})\right] + \\ + \left[-c_{\mathrm{s}}{}^2(\eta)\left[\triangle + 3K\right] - \frac{1}{2}\left[\epsilon(\eta) + p(\eta)\right]a^2(\eta)\right] \times \\ \times \left[\epsilon(\eta)a^3(\eta)\epsilon_{\mathrm{m}}(\eta, \mathbf{x})\right] = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

*Zmienne*:
$\epsilon_{\mathrm{m}}$ — kontrast gęstości mierzony na powierzchniach ortogonalnych do przepływu materii.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\epsilon_{\mathrm{m}}}(\eta,\mathbf{x})=0$ jest spełnione przez:

$$\widehat{\epsilon_{\mathrm{m}}}(\eta,\mathbf{x})=\frac{H^2(\eta)}{a^2(\eta)\left[\epsilon(\eta)+p(\eta)\right]}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{a^3(\eta)\epsilon(\eta)}{H(\eta)}\epsilon_{\mathrm{m}}(\eta,\mathbf{x})\right]. \tag{23}$$

*Autorzy*: Lyth and Stewart [21]
*Równania propagacji* (układ (35–36) w pracy [21])

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\epsilon(t,\mathbf{x})=-\theta(t)\delta\epsilon(t,\mathbf{x})-\left[\epsilon(t)+p(t)\right]\delta\theta(t,\mathbf{x}), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\delta\theta(t,\mathbf{x})=-&\left[\frac{1}{2}+\frac{{c_{\mathrm{s}}}^2(\eta)\left[3\epsilon(t)-\theta^2(t)\right]}{3\left[\epsilon(t)+p(t)\right]}\right]\delta\epsilon(t,\mathbf{x})+\\&-\frac{2}{3}\theta(t)\delta\theta(t,\mathbf{x})-\frac{{c_{\mathrm{s}}}^2(\eta)}{\epsilon(t)+p(t)}\triangle\delta\epsilon(t,\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{25}$$

*Zmienne*:
$\delta\epsilon$, $\delta\theta$ — zaburzenie gęstości i ekspansji na hiperpowierzchniach ortogonalnych do przepływu materii.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\delta\epsilon}(\eta,\mathbf{x})=0$ spełnione jest przez:

$$\widehat{\delta\epsilon}(\eta,\mathbf{x})=\frac{H^2(\eta)}{a^2(\eta)\left[\epsilon(\eta)+p(\eta)\right]}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{a^3(\eta)\epsilon(\eta)}{H(\eta)}\delta\epsilon(\eta,\mathbf{x})\right]. \tag{26}$$

*Autorzy*: Brandenberger, Kahn and Press [22] (wg [23], po uogólnieniu dla dowolnego $K$)
*Równanie propagacji* ([23] — równanie (5.3) dla $\delta S=0$, w cechowaniu podłużnym.):

$$\begin{aligned}&\phi''(\eta,\mathbf{x})+3(1+{c_{\mathrm{s}}}^2(\eta))\mathcal{H}(\eta)\phi'(\eta,\mathbf{x})-{c_{\mathrm{s}}}^2(\eta)\triangle\phi(\eta,\mathbf{x})+\\&\quad+\left[2\mathcal{H}'(\eta)+(1+3{c_{\mathrm{s}}}^2(\eta))(\mathcal{H}^2(\eta)-K)\right]\phi(\eta,\mathbf{x})=0.\end{aligned} \tag{27}$$

*Zmienne*:
$\phi(\eta,\mathbf{x})$ — gauge-inwariantny potencjał a $\mathcal{H}(\eta)=a'(\eta)/a(\eta)$.
Równanie falowe $\Box\,\widehat{\phi}(\eta,\mathbf{x})=0$ spełnione jest przez:

$$\widehat{\phi}(\eta,\mathbf{x})=\frac{1}{\epsilon(\eta)+p(\eta)}\left[\frac{\mathcal{H}(\eta)}{a^2(\eta)}\right]^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{a^2(\eta)}{\mathcal{H}(\eta)}\phi(\eta,\mathbf{x})\right]. \tag{28}$$

Zapisanie równań perturbacyjnych w zwartej postaci równania d'Alemberta dowodzi falowej natury zaburzeń gęstości we wszechświecie z dowolnym barotropowym równaniem stanu $p = p(\epsilon)$, ale nie przesądza o własnościach dyspersyjnych tych fal. Zarówno relacje dyspersyjne, jak i rozwiązania (tam, gdzie to możliwe) muszą być wyznaczone dla każdego z równań stanu odrębnie.

## 4. Fale akustyczne we wczesnym wszechświecie

Tensor energii-pędu wszechświata wypełnionego ultrarelatywistyczną materią jest bezśladowy. Dynamikę takiego wszechświata określa równanie dla czynnika skali $a(\eta)$

$$T^{\mu}{}_{\mu} = -\frac{6}{a^3(\eta)}\left(a''(\eta) + K\,a(\eta)\right) = 0. \tag{29}$$

Rozwiązanie ma postać

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{3}}\frac{\sin\left(\sqrt{K}\eta\right)}{\sqrt{K}}, \tag{30}$$

gdzie współczynnik normalizacyjny $\sqrt{\mathcal{M}/3}$ zawiera stałą ruchu $\mathcal{M} = \rho(\eta)a^4(\eta)$. Analizę perturbacyjną dla tego przypadku prowadzimy w gauge'u ortogonalnym. Równanie perturbacyjne (22) lub adekwatne równanie drugiego rzędu otrzymane z układu (24) i (25) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\delta(\eta,\mathbf{x}) - \frac{2\mathcal{M}}{3a^2(\eta)}\delta(\eta,\mathbf{x}) - \frac{1}{3}\triangle\delta(\eta,\mathbf{x}) = 0. \tag{31}$$

$\triangle$ jest operatorem Laplace'a-Beltramiego działającym na hiperpowierzchniach ortogonalnych do przepływu. $\delta(\eta,\mathbf{x})$ oznacza kontrast gęstości $\epsilon_{\mathrm{m}}$ w formalizmie Bardeena [4] lub $\delta\epsilon/\epsilon$ w formalizmie Lytha-Mukherjee [24]. Chociaż transformacja (7) przeprowadza równanie (31) w równanie d'Alemberta w przestrzeni Robertsona-Walkera (13), jednakże szczególna symetria modelu radiacyjnego pozwala użyć innej transformacji

$$\widehat{\delta}(\eta,\mathbf{x}) = \frac{1}{a(\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}(a(\eta)\delta(\eta,\mathbf{x})), \tag{32}$$

która przeprowadza równanie perturbacyjne (31) do równania falowego w zakrzywionej przestrzeni statycznej

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\widehat{\delta}(\eta,\mathbf{x}) - \frac{1}{3}\triangle\widehat{\delta}(\eta,\mathbf{x}) = 0. \tag{33}$$

Zmienna $\widehat{\delta}$ zachowuje się wówczas jak bezmasowe pole skalarne w statycznej czasoprzestrzeni o stałej krzywiźnie. Analizę tego równania w kontekście kwantowej teorii pola dla przypadku dodatniej krzywizny przestrzennej (statyczny wszechświat Einsteina) można znaleźć w monografii [15]. W kosmologii przestrzenie z zerową lub ujemną krzywizną grają szczególną rolę. Oba przypadki będą przedyskutowane oddzielnie poniżej.

### 4.1. Fale dźwiękowe w płaskim modelu wszechświata

Kiedy krzywizna przestrzeni znika, równanie (31) przyjmuje szczególnie prostą postać

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\delta(\eta,\mathbf{x}) - \frac{2}{\eta^2}\delta(\eta,\mathbf{x}) - \frac{1}{3}\triangle\delta(\eta,\mathbf{x}) = 0, \tag{34}$$

identyczną jak równanie propagacji dla fal grawitacyjnych we wszechświecie wypełnionym pyłem [11]

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\nu(\eta,\mathbf{x}) - \frac{2}{\eta^2}\nu(\eta,\mathbf{x}) - \triangle\nu(\eta,\mathbf{x}) = 0. \tag{35}$$

Zasadnicza różnica polega na tym, że fale grawitacyjne są określone przez pole tensorowe $h_{\mu\nu}$ i propagują się z prędkością światła ($c = 1$), podczas gdy rozwiązania równania (34) reprezentują fale skalarne poruszające się z prędkością $v = 1/\sqrt{3}$.

Równanie (33) zapisane we współrzędnych kartezjańskich $\{\mathbf{x}\}$ spełnione jest przez dowolną funkcję $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - v\eta)$ [25] z $v = 1/\sqrt{3}$ i $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$. Jednak dla zapewnienia przybliżenia liniowego funkcja $\widehat{\delta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - v\eta)$ powinna być ograniczona. Rozwiązanie $\widehat{\delta}$ równania (33) jest podstawą do wyznaczenia obserwabli $\delta$. Ogólne ograniczone rozwiązanie równania (34) wyraża się całką

$$\delta(\eta,\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \eta'\,\widehat{\delta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - v\eta')\mathrm{d}\eta' \tag{36}$$

dowolnej, ograniczonej funkcji $\widehat{\delta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - v\eta)$ i opisuje falę o zmiennym w czasie kształcie, biegnącą ze stałą prędkością $v = 1/\sqrt{3}$.

Rozwiązania te można również zapisać przy pomocy całki Fouriera. Dowolnej rzeczywistej funkcji $\widehat{\delta}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - v\eta)$

$$\widehat{\delta}(\eta,\mathbf{x}) = \int\!\left(\mathtt{A}_{\mathbf{k}}\mathtt{u}_{\mathbf{k}}(\eta,\mathbf{x}) + \mathtt{A}^*_{\mathbf{k}}\mathtt{u}^*_{\mathbf{k}}(\eta,\mathbf{x})\right)\mathrm{d}^3k \tag{37}$$

rozwiniętej w mody

$$\mathtt{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\eta)} \tag{38}$$

odpowiada rozwinięcie

$$\delta(\eta, \mathbf{x}) = \int (\mathcal{A}_{\mathbf{k}}\, u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) + \mathcal{A}^*_{\mathbf{k}}\, u^*_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}))\, \mathrm{d}^3 k \tag{39}$$

w mody $u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x})$

$$u_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x}) = \mu_\omega(\eta) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(1 + \frac{1}{i\omega\eta}\right) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega\eta)}. \tag{40}$$

Częstość $\omega$ spełnia relację dyspersyjną $\omega^2 = k^2/3$, współczynniki Fouriera $\mathcal{A}_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{i\omega}\mathtt{A}_{\mathbf{k}}$ wyrażają się dowolną zespoloną funkcją liczby falowej $k$, a $u_{\mathbf{k}}$ wyznacza wzór (36) przy podstawieniu $\widehat{\delta} = \mathtt{u}_{\mathbf{k}}$. Mody $u_{\mathbf{k}}$ podobnie jak $\mathtt{u}_{\mathbf{k}}$ tworzą ortonormalną bazę względem iloczynu Kleina-Gordona [15]. $\mathtt{u}_{\mathbf{k}}$ i $u_{\mathbf{k}}$ są falami biegnącymi, ale jedynie $\mathtt{u}_{\mathbf{k}}$ zachowuje stałą amplitudę. Tak więc typowe zaburzenie $\delta(\eta, \mathbf{x})$ zbudowane jest z biegnących, tłumionych fal płaskich, co w pełni zgadza się z rezultatem Sachsa i Wolfe'a ([5] ss. 76–77). Fale te poruszają się ze stałą prędkością $v = 1/\sqrt{3}$ niezależnie od ich częstości. Zaburzenia drobno– i wielkoskalowe nie stanowią odrębnych klas rozwiązań.

Jeśli źródłem zaburzeń są procesy losowe lub kwantowe w pewnej epoce $\eta_i > 0$, a ich ewolucja wprzód w czasie ($\eta > \eta_i$) opisana jest przez (34), wówczas rozbieżność rozwiązań równania (34) w granicy $\eta \to 0^+$ (wstecz w czasie) jest fizycznie bez znaczenia. Pozostaje ona też bez związku z zachowaniem przybliżenia liniowego.

### 4.2. Fale dźwiękowe w przestrzeni zakrzywionej

Dokonując rozkładu fourierowskiego zaburzeń w otwartym modelu friedmannowskim, należy pamiętać o specyficznych efektach wywołanych krzywizną. Funkcje całkowalne z kwadratem w przestrzeni o ujemnej krzywiźnie (w przestrzeni Łobaczewskiego) rozwijają się w serię główną rozwiązań równania Helmholtza. To samo dotyczy zaburzeń, których autokorelacja znika powyżej pewnej skali [26]. Jednak dla przedstawienia jednorodnego procesu stochastycznego w postaci całki Fouriera konieczne są obie serie, główna i dodatkowa [27]. W kosmologii pojawiają się więc rozwiązania równania Helmholtza odpowiadające urojonym liczbom falowym z przedziału $k \in [-i, i]$. Czasami określane są one mianem modów nadkrzywiznowych (*supercurvature*) [28], [29] i [30].

Użyjemy układu współrzędnych sferycznych. Identycznie jak pole skalarne w teorii pola [31] zaburzenia skalarne w kosmologii można przedstawić rozwinięciem

$$\delta(\eta, \chi, \vartheta, \varphi) = \\ = \sum_{l,m} \int \Big( A_{klm}\, u_{klm}(\eta, \chi, \vartheta, \varphi) + A^*_{klm}\, u^*_{klm}(\eta, \chi, \vartheta, \varphi) \Big)\, \mathrm{d}^3 k, \tag{41}$$

gdzie mody $u_{klm}(\eta, \chi, \vartheta, \varphi) = \mu_{\omega,K}(\eta) Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi)$ wyrażają się przez harmoniki hipersferyczne $Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi)$ i zależną od czasu amplitudą $\mu_{\omega,K}(\eta)$ spełniającą równanie

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2} \mu_{\omega,K}(\eta) + \left( \frac{k^2 - K}{3} - \frac{2K}{\sin^2(\sqrt{K}\eta)} \right) \mu_{\omega,K}(\eta) = 0 \tag{42}$$

(wynik separacji równania (31) na część czasową i przestrzenną). Znajdujemy unormowane rozwiązania (42) jako

$$\mu_{\omega,K}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega^2 - K}} \left( 1 + \sqrt{K}\, \frac{\cot(\sqrt{K}\eta)}{i\omega} \right) \mathrm{e}^{-i\omega\eta} \tag{43}$$

i ich sprzężenia zespolone. Rozwiązania $\mu_{\omega,K}(\eta)$ zmierzają do $\mu_\omega(\eta)$ w równaniu (40) w granicy $K \to 0$. Częstość $\omega$ i liczba falowa są związane relacją dyspersyjną

$$\omega(k) = \frac{\sqrt{k^2 - K}}{\sqrt{3}}, \tag{44}$$

którą można otrzymać przez podstawienie (43) do (42). Ograniczymy się dalej do przypadku ujemnej krzywizny $K = -1$. Funkcje $Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi)$ są rozwiązaniami równania Helmholtza [15]

$$\triangle Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi) = -(k^2 + 1) Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi). \tag{45}$$

Można w nich wydzielić część radialną $\Pi_{kl}(\chi)$ i harmoniki sferyczne $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$Y_{klm}(\chi, \vartheta, \varphi) = \Pi_{kl}(\chi)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{46}$$

Rozwiązania równania radialnego

$$\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\Pi_{kl}(\chi) + 2\coth\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\Pi_{kl}(\chi) + \\ + \left(k^2 + 1 - \frac{l(l+1)}{\sinh^2\chi}\right)\Pi_{kl}(\chi) = 0 \tag{47}$$

dane są przez

$$\Pi_{kl} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k^2\left[\prod_{n=0}^{l}(n^2+k^2)\right]^{-1/2} \times \\ \times(k^2\sinh\chi)^l\left(\frac{-1}{k\sinh\chi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(k\chi)}\right)^{l+1}\cos(k\chi). \tag{48}$$

Dla rzeczywistych liczb falowych ($k^2 > 0$) funkcje $\Pi_{kl}$ (i w rezultacie również $Y_{klm}(\chi,\vartheta,\varphi)$) są funkcjami oscylacyjnymi zmiennej radialnej. $Y_{klm}(\chi,\vartheta,\varphi)$ tworzą układ ortogonalny względem iloczynu skalarnego $(f_1|f_2) = \int f_1 f_2^* \sqrt{g}\,\mathrm{d}^3x$ i stanowią bazę zupełną przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem [32], [33].

Dla urojonych liczb falowych z przedziału $-1 \le k^2 < 0$ funkcje $\Pi_{kl}$ są monotonicznie malejące. Wówczas $Y_{klm}(\chi,\vartheta,\varphi)$ stanowią serię dodatkową. Funkcje te są regularne, dodatnie i ograniczone w całej przestrzeni, nie są więc ortogonalne. Mimo że seria dodatkowa jest zbędna przy rozkładzie funkcji całkowalnych z kwadratem, bierze ona udział w stochastycznych całkach fourierowskich dla procesów słabo jednorodnych, tzn. procesów o wartości oczekiwanej i wariancji niezależnych od położenia. Procesy słabo jednorodne to najogólniejsza forma losowych zaburzeń kosmologicznych zgodna z wymogiem jednorodności i izotropii wszechświata [27], [28].

W ten sposób w otwartych modelach otrzymujemy dwa typy harmonik hipersferycznych $Y_{klm}(\chi,\vartheta,\varphi)$ i odpowiadające im odpowiednio dwa rodzaje modów $u_{klm}(\eta,\chi,\vartheta,\varphi)$. Mody $u_{klm}(\eta,\chi,\vartheta,\varphi)$ z rzeczywistym $k$ są ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego Kleina-Gordona [31]. Mody $u_{klm}(\eta,\chi,\vartheta,\varphi)$ z $-1 \le k^2 < 0$ reprezentują zaburzenia o „nieskończonej długości". Obydwa rodzaje modów dają wkład do spektrum losowo (lub kwantowo) powstających niejednorodności [29], [30].

Perturbacje gęstości propagują się w otwartym wszechświecie w odmienny sposób niż pole skalarne lub fale grawitacyjne. Fale akustyczne o różnych skalach długości propagują się z różnymi prędkościami. Z relacji dyspersyjnej (44) możemy otrzymać odpowiednio prędkość fazową

$$v_{\mathrm{f}}(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3}k} \tag{49}$$

i grupową dźwięku

$$v_{\mathrm{g}}(k) = \frac{\partial}{\partial k}\omega(k) = \frac{k}{\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}. \tag{50}$$

Prędkość grupowa wzrasta z liczbą falową i przyjmuje wartość zerową w granicy $k \to 0$. Warunek $k = 0$ określa krytyczną częstość $\omega(0) = 1/\sqrt{3}$, poniżej której propagacja jest zabroniona. Dlatego biegnące fale akustyczne skonstruowane są modów serii głównej. Seria dodatkowa tworzy „globalne" zaburzenia stacjonarne o skali przekraczającej charakterystyczny promień krzywizny przestrzennej.

## 5. Przestrzennie płaski model z dodatnią stałą kosmologiczną

W płaskim modelu wszechświata zdominowanym przez promieniowanie z dodatnią stałą kosmologiczną, równanie Friedmanna jest spełnione przez czynnik skali dany wzorem

$$a(t) = (\mathcal{M}/\Lambda)^{1/4}\sqrt{\sinh(2\sqrt{\Lambda/3}\,t)} = (\mathcal{M}/\Lambda)^{1/4}\sqrt{\sinh\tau}, \tag{51}$$

gdzie $\mathcal{M} = \epsilon\, a^4$ jest stałą ruchu, $\epsilon$ jest gęstością energii, a związek bezwymiarowego parametru czasu $\tau$ z czasem metryki $t$ wyraża się związkiem $\tau = 2\sqrt{\Lambda/3}\,t$. Aby zapis dalszych wzorów stał się bardziej przejrzysty wprowadzamy stałą $\beta$ związaną ze stałą ruchu i stałą kosmologiczną zależnością $\beta = \sqrt{3}/[16\mathcal{M}\Lambda]^{1/4}$. Czas konforemny $\eta$ wyraża się przez bezwymiarowy czas $\tau$ związkiem

$$\eta = \beta\, F\left(\arccos\left[\frac{1-\sinh\tau}{1+\sinh\tau}\right], \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{52}$$

i jest skończony, $\eta \in [0,\, 2K(2^{-1/2})\beta] = [0,\, \frac{1}{2}\pi^{-1/2}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2\beta]$. Funkcja $F(\phi, m)$ jest całką eliptyczną niezupełną pierwszego rodzaju, a funkcja $K(m)$ jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju [34]. Wówczas czynnik skali możemy wyrazić za pomocą funkcji eliptycznych Jacobiego $\mathrm{sn}(u,m)$ i $\mathrm{cn}(u,m)$ w nowej zmiennej $u = \eta/\beta$

$$a(\eta) = 2\beta\sqrt{\mathcal{M}/3}\,\frac{\mathrm{sn}(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}{1+\mathrm{cn}(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}. \tag{53}$$

W czasie konforemnym czynnik skali $a(\eta)$ monotonicznie rośnie od 0 do nieskończoności. W otoczeniu początkowej osobliwości o zachowaniu czynnika skali decyduje jedynie promieniowanie, a wpływ stałej kosmologicznej jest zaniedbywalny. W końcowym okresie ewolucji w pobliżu $\eta = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2\beta$, odpowiadającego fazie de Sittera stała kosmologiczna gra dominującą rolę, natomiast udział promieniowania jest pomijalny.

### 5.1. Równanie perturbacyjne

Biorąc wariację równania Raychaudhuriego i równania ciągłości, możemy otrzymać równanie propagacji dla kontrastu gęstości $\delta\epsilon/\epsilon$. Zmienna $\delta(\tau, \mathbf{x}) = \delta\epsilon/\epsilon$, jak poprzednio, jest miarą zaburzenia na powierzchniach ortogonalnych do przepływu, a równanie propagacji [24] ma postać

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}(\tau, \mathbf{x}) + \frac{1}{2}\coth(\tau)\dot{\delta}(\tau, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\coth^2(\tau)\delta(\tau, \mathbf{x}) + \\ -v^2\beta^2 \operatorname{csch}(\tau)\triangle\delta(\tau, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Znacznie wygodniejsze w dalszych rozważaniach będzie zapisanie powyższego równania w czasie konforemnym

$$\delta''(\eta, \mathbf{x}) + \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{2}{\operatorname{sn}^2(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}\right)\delta(\eta, \mathbf{x}) - v^2\,\triangle\delta(\eta, \mathbf{x}) = 0. \tag{55}$$

Dogodnie będzie również przedstawiać rozwiązania w postaci całki Fouriera

$$\delta(\eta, \mathbf{x}) = \int \mathcal{A}_{\mathbf{k}}\, \mathsf{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x})\, \mathrm{d}^3k + \text{c.c.} \tag{56}$$

W równaniu (55) prim oznacza pochodną po czasie konforemnym, a współczynniki Fouriera $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}$ występujące w całce (56) są dowolnymi zespolonymi funkcjami liczby falowej $k$. Mody $\mathsf{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x})$ spełniają jednocześnie równanie Helmholtza i część czasową równania (55). Rozwiązania dzielą się na dwie podstawowe klasy rozdzielone krytyczną wartością liczby falowej $k_{\mathrm{kr}} = 1/(\sqrt{2/3}\,\beta) = (4\mathcal{M}\Lambda)^{1/4}$. Poniżej — ze względu na przejrzystość zapisu rozwiązań — wprowadzamy bezwymiarową miarę wektora falowego określoną zależnością $|\boldsymbol{\kappa}| = \kappa = \sqrt{2}\,v\beta k = \sqrt{2/3}\,\beta k$. W notacji tej obie klasy rozwiązań są określone odpowiednio nierównościami $\kappa > 1$ i $\kappa \leq 1$.

### 5.2. Perturbacje podkrytyczne: rozwiązania dla $\kappa > 1$

Dla krótkich skal ($\kappa > 1$) rozwiązania propagują się jak fale o zmiennej amplitudzie i zmiennej częstości. Pojedyncze mody $\mathsf{u}_{\boldsymbol{\kappa}}(\eta, \mathbf{x})$ przyjmują postać

$$\mathsf{u}_{\boldsymbol{\kappa}}(\eta, \mathbf{x}) = \\ = \frac{\operatorname{sn}([2\sqrt{\pi}\,\beta]^{-1}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2, \frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{2 + (\kappa^2-1)\operatorname{sn}^2(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}}{\sqrt{2 + (\kappa^2-1)\operatorname{sn}^2([2\sqrt{\pi}\,\beta]^{-1}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2, \frac{1}{\sqrt{2}})\operatorname{sn}^2(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}} \times \\ \times \exp[i\,\Theta(\eta, \mathbf{x})], \tag{57}$$

gdzie faza $\Theta(\eta, \mathbf{x})$ jest dana przez

$$\Theta(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}}{\sqrt{2}\beta v} - \frac{\kappa\sqrt{\kappa^4-1}}{\sqrt{2}(\kappa^2-1)} \times \\ \times \left[\frac{\eta}{\beta} - \Pi\left(\operatorname{am}\left(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}(\kappa^2-1), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{58}$$

Funkcja $\Pi(\phi, \alpha^2, m)$ jest całką eliptyczną niezupełną trzeciego rodzaju, a funkcja $\operatorname{am}(u, m)$ jest amplitudą całki eliptycznej [34]. Rozwiązanie to jest osobliwe na obu końcach czasu konforemnego. W pobliżu osobliwości początkowej promieniowanie gra dominującą rolę i rozwiązania $\mathsf{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x})$ zachowują się jak dla wszechświata bez stałej kosmologicznej (rozdział 4.1). W późnych etapach ewolucji dla $\eta \to \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2$ wszechświat realizuje eksponencjalny wzrost gdyż dominującą rolę gra stała kosmologiczna, a osobliwości w rozwiązaniach $\mathsf{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \mathbf{x})$ dla $\eta \to \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2$ są znane jako niestabilność wszechświata de Sittera [35].

Definiujemy lokalną częstość[3] $\omega(\eta, \kappa)$ jako pochodną czasową fazy $\Theta(\eta, \mathbf{x})$

$$\omega(\eta, \kappa) = \frac{\partial\,\Theta(\eta, \mathbf{x})}{\partial\,\eta} = \frac{\kappa\sqrt{\kappa^4-1}\operatorname{sn}^2(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}\beta(2 + (\kappa^2-1)\operatorname{sn}^2(\frac{\eta}{\beta}, \frac{1}{\sqrt{2}}))}. \tag{59}$$

Tak określona częstość jest wielkością zależną nie tylko od liczby falowej, ale także od czasu konforemnego. Formuła (59) gra rolę relacji dyspersyjnej i jest nieliniowa względem liczby falowej $k$. Wartości $\kappa_{\mathrm{kr}} = 1$ odpowiada krytyczna wartość liczby falowej ($k_{\mathrm{kr}} =$

[3]Szczegółowe definicje zobacz [25].

$\sqrt{2/3}\,\beta = [4\mathcal{M}\Lambda]^{1/4})$, która z kolei determinuje krytyczną długość fali $\lambda_{\mathrm{kr}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{[\mathcal{M}\Lambda]^{1/4}}$. Powyżej wartości krytycznej $\lambda_{\mathrm{kr}}$ propagacja zaburzeń w postaci fal jest niedozwolona. Z relacji dyspersyjnej widać, że dla $\kappa \to 1^+$, częstość zmierza do zera i dlatego perturbacje większe niż wartość krytyczna nie mają charakteru falowego. W przeciwieństwie do dyspersji na krzywiźnie, dyspersja na stałej kosmologicznej posiada anomalny charakter: krytyczne zachowanie dotyczy skali (liczby falowej $k$), a nie częstości $\omega$. Charakter anomalny widać również w postaci prędkości fazowej i grupowej

$$v_{\mathrm{f}}(\eta,\kappa,\beta) = \frac{\omega(\eta,\kappa)}{k} = \frac{\sqrt{\kappa^4-1}\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{3}\,[2+(\kappa^2-1)\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})]}, \tag{60}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{g}}(\eta,\kappa,\beta) &= \frac{\partial\,\omega(\eta,\kappa)}{\partial\,k} = \\ &= \frac{[6\kappa^4-2+(\kappa^2-1)(\kappa^4-2\kappa^2-1)\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})]\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{3}\,\sqrt{\kappa^4-1}\,[2+(\kappa^2-1)\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})]^2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Prędkość fazowa maleje wraz ze wzrostem długości fali [36], a w konsekwencji prędkość grupowa $v_{\mathrm{g}}(\eta,\kappa,\beta)$ jest większa niż prędkość fazowa $v_{\mathrm{f}}(\eta,\kappa,\beta)$. W granicy $\kappa \to 1^+$ prędkość fazowa zmierza do zera, podczas gdy prędkość grupowa formalnie rośnie nieograniczenie. Oznacza to, że koncepcja pakietu falowego traci sens [37].

### 5.3. Nadkrytyczne perturbacje: rozwiązania dla $\kappa \le 1$

Wielkoskalowe rozwiązania ($\kappa \le 1$) nie propagują się jako fale biegnące. Przestrzeń rozwiązań tworzy kombinacja liniowa dwóch modów $\mathsf{u}_\kappa^{(1)} \exp(i\,\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x})$ i $\mathsf{u}_\kappa^{(2)} \exp(i\,\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x})$, gdzie części czasowe $\mathsf{u}_\kappa^{(1)}$ i $\mathsf{u}_\kappa^{(2)}$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \mathsf{u}_\kappa^{(1)}(\eta) &= \\ &= \frac{\mathrm{sn}([2\sqrt{\pi}\,\beta]^{-1}[\Gamma(\frac14)]^2,\frac{1}{\sqrt{2}})\,\sqrt{2-(1-\kappa^2)\,\mathrm{sn}^2(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})}}{\sqrt{2-(1-\kappa^2)\,\mathrm{sn}^2([2\sqrt{\pi}\,\beta]^{-1}[\Gamma(\frac14)]^2,\frac{1}{\sqrt{2}})}\;\mathrm{sn}(\frac{\eta}{\beta},\frac{1}{\sqrt{2}})}\times \\ &\times \exp\left\{\frac{\kappa\sqrt{1-\kappa^4}}{\sqrt{2}(1-\kappa^2)}\left[-\frac{\eta}{\beta}+\Pi\Big(\mathrm{am}\big(\tfrac{\eta}{\beta},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big),\tfrac12(1-\kappa^2),\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\mathsf{u}_\kappa^{(2)}(\eta) = \mathsf{u}_\kappa^{(1)}(\eta) \int\limits_0^\eta \frac{1}{[\mathsf{u}_\kappa^{(1)}(\eta')]^2}\, \mathrm{d}\eta' \tag{63}$$

i są funkcjami rzeczywistymi. W pobliżu osobliwości początkowej rozwiązanie $\mathsf{u}_\kappa^{(1)}$ jest osobliwe i zachowuje się jak mod malejący, podczas gdy rozwiązanie $\mathsf{u}_\kappa^{(2)}$ jest regularne i gra rolę modu rosnącego. Zachowanie wielkoskalowych perturbacji pod tym względem przypomina zachowanie zaburzeń gęstości w bezciśnieniowej materii. Dalej ewoluują one odmiennie. W tej epoce, w której rozwiązania z $\kappa > 1$ oscylują, mody z $\kappa \leq 1$ zachowują w przybliżeniu stałą amplitudę. W końcu, w epoce de Sittera obydwa mody $\mathsf{u}_\kappa^{(1)}$ i $\mathsf{u}_\kappa^{(2)}$ eksponencjalnie narastają.

Rozwiązania dla dwóch granicznych przypadków: $\kappa = 0$ i $\kappa = 1$ wyrażają się prostszymi formułami i nie zamieszczamy ich tutaj; można je znaleźć w pracy [13].

Dynamika wielkoskalowych perturbacji nie świadczy o ich wyjątkowej roli w procesie formowania struktur. Amplitudy, ich są w całym przedziale czasowym porównywalne z amplitudami modów oscylujących. Ponieważ perturbacje te nie propagują się w przestrzeni, zaburzenia gęstości i ekspansji są skorelowane w fazie; zgodnie dla modu malejącego, natomiast przeciwnie dla modu rosnącego.

## 6. Podsumowanie

Analiza gauge-inwariantna potwierdza, że zaburzenia gęstości we wszechświecie zdominowanym przez promieniowanie tworzą pole akustyczne. We wszechświecie płaskim zaburzenia gęstości wszystkich skal poruszają się z tą samą prędkością $v = 1/\sqrt{3}$. Perturbacje drobnoskalowe i wielkoskalowe nie tworzą różnych klas rozwiązań. Prędkość propagacji nie zależy od liczby falowej i w szczególności jest ta sama dla zaburzeń mniejszych i większych od horyzontu cząstek.

W otwartym wszechświecie ewolucja zaburzeń zachodzi w sposób znacznie bardziej złożony. Ujemna krzywizna przestrzenna jest przyczyną dyspersji fal akustycznych. Geometria wszechświata determinuje minimalną częstość dla propagujących się fal akustycznych, podobnie jak geometria falowodu określa minimalną częstość dla fal propagujących się w jego wnętrzu. Częstość krytyczna zależy wyłącznie od krzywizny (a nie od tzw. skali Jeansa). Poniżej tej częstości rozwiązania mają formę nadkrzywiznowych zaburzeń stacjonarnych. We wszechświecie zdominowanym przez promieniowanie podział na fale biegnące i stojące pokrywa się z podziałem na zaburzenia podkrzywiznowe i nadkrzywiznowe.

Stała kosmologiczna, podobnie jak krzywizna, również jest przyczyną dyspersji pola akustycznego we wczesnym wszechświecie. W obydwu przypadkach zjawisko dyspersji jest indukowane przez geometrię czasoprzestrzeni. Nie zależy ono ani od warunków początkowych pola akustycznego na początku ery radiacyjnej, ani od tego, czy epoka ta była poprzedzona innymi epokami kosmologicznymi.

Dyspersja spowodowana stałą kosmologiczną jest mierzalna w tym sensie, że krytyczna skala długości jest porównywalna z rozmiarami obszaru powierzchni ostatniego rozproszenia obserwowanego dzisiaj. Niemniej jednak do wykrycia dyspersji potrzebujemy bardziej kompletnych danych obserwacyjnych z powierzchni ostatniego rozproszenia, w szczególności potrzebna jest znajomość dwóch dynamicznych wielkości — np. pola gęstości i pola prędkości materii — czego nie można zrekonstruować z samej tylko temperatury. Ze względu na związki zjawisk dyspersyjnych z geometrią wszechświata rozróżnienie fal biegnących od zaburzeń stacjonarnych może mieć znaczenie dla interpretacji widma fluktuacji temperatury mikrofalowego promieniowania tła.

## Bibliografia

[1] E.R. Harrison, *Rev. Mod. Phys.* **39**, 862 (1967).

[2] A.D. Sakharov, *Zh. Exp. Theor. Fiz.* **49**, 345 (1965).

[3] K. Sakai, *Prog. Theoret. Phys.* **41**, 1461 (1969).

[4] J.M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).

[5] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).

[6] V.N. Lukash, *Sov. Phys. JETP* **79**, 1601 (1980);
patrz również: V. N. Lukash, astro-ph/9910009.

[7] G.V. Chibisov and V. F. Mukhanov, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **200**, 535 (1982).

[8] E. Lifshitz, *J. Phys.* (USSR) **10**, 116 (1946);
E.M. Lifshitz and I.M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* **12**, 185 (1963);
L.D. Landau, E.M. Lifszyc, *Teoria pola* (PWN, Warszawa 1977).

[9] Z.A. Golda and A. Woszczyna, *J. Math. Phys.* **42**, 856 (2001).

[10] K. Yamamoto, N. Sugiyama, H. Sato, *Phys. Rev. D* **56**, 7566 (1997).

[11] L.P. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **67**, 825 (1974).

[12] M. White, *Phys. Rev. D* **46**, 4198 (1992).

[13] Z.A. Golda and A. Woszczyna, *Class. Quantum Grav.* **20**, 277 (2003).

[14] Z.A. Golda and A. Woszczyna, *Phys. Lett.* A **310**, 357 (2003).

[15] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[16] L.P. Grishchuk, *Phys. Rev. D* **50**, 7151 (1994).

[17] W. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981),
W. Unruh, *Phys. Rev. D* **51**, 2827 (1995),
M. Visser, *Class. Quantum Grav.* **15**, 1767 (1998),
N. Bilic, *Class. Quantum Grav.* **16**, 3953 (1999).

[18] D.W. Olson, *Phys. Rev. D* **14**, 327 (1976).

[19] A. Woszczyna and A. Kulak, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1665 (1989).

[20] M. Bruni, P.K.S. Dunsby and G.F.R. Ellis, *Astrophys. J.* **395**, 34 (1992).

[21] D. Lyth and E. Stewart, *Astrophys. J.* **361**, 343 (1990).

[22] R. Brandenberger, R. Kahn, and W. Press, *Phys. Rev. D* **28**, 1809 (1983).

[23] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).

[24] D. Lyth and M. Mukherjee, *Phys. Rev. D* **38**, 485 (1988).

[25] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Sons, New York, 1974).

[26] A. Stebbins and R.R. Caldwell, *Phys. Rev. D* **52**, 3248 (1995).

[27] M. Yaglom, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium* Volume II, Ed. J. Neyman (University of California Press, Berkeley 1961).

[28] D.H. Lyth and A. Woszczyna, *Phys. Rev. D* **52**, 3338 (1995).

[29] D. Langlois, *Phys. Rev. D* **55**, 7389 (1997).

[30] D.I. Kaiser, *Phys. Rev. D* **56**, 706 (1997).

[31] M. Sasaki, T. Tanaka, and K. Yamamoto, *Phys. Rev. D* **51**, 2979 (1995).

[32] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N.Ya. Vilenkin, *Generalized Functions: Volume 5; Integral Geometry and Representation Theory* (Academic Press Inc., New York 1966);
M.A. Naimark, *Linear Representations of the Lorentz Group* (Pergamon Press 1964).

[33] M. Bander and C. Itzykson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 346 (1966).

[34] P.F. Byrd and M.D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* (Springer-Verlag, Berlin 1954).

[35] W. Zimdahl, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **257**, 445 (1992).

[36] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna* (Część I *Mechanika i akustyka*), (PWN, Warszawa 1972).

[37] W.L. Ginzburg, *Fale elektromagnetyczne w plazmie* (PWN, Warszawa 1964).